"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套辅导

高等数学学习指导

方桂英　崔克俭　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与方桂英、崔克俭主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《高等数学》(第三版)相配套的学习指导书,主要作为本课程的课后复习和提高之用.本书按章编写,每章包括内容概要、学习目标、释疑与典型例题解析、习题选解、测验题与答案. 本书切合实际,注重提高学生对高等数学的基本概念、基本定理、基本计算方法与数学思想的理解与应用.

本书也可单独使用,便于自学,适合高等院校经济类、管理类、农林类等专业的学生使用,对教师也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/方桂英,崔克俭主编.—北京:科学出版社,2015.8
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-045596-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①方…②崔…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 203698 号

责任编辑:胡海霞　张中兴/责任校对:张凤琴
责任印制:霍　兵/封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第　一　版　　开本:720×1000　1/16
2015 年 8 月第一次印刷　　印张:25 1/4
字数:509 000

定价:43.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学学习指导》编委会

主　编　方桂英　崔克俭

副主编　赵喜梅　胡菊华　张立峰

参　编　曾海福　韩忠海　程国华

刘　章　伍　健　王巧玲

李灿华　张莉莉　顾　剑

前　　言

高等数学是高等学校非数学专业普遍开设的重要数学课程.近年来由于许多专业课程设置的变化而使数学的学时减少，这给本来学时就偏紧的数学课程教学带来了一些新的矛盾与问题.由于数学本身的抽象等特点，许多学生不能很好地适应并感到学习困难，也有些学生因学习能力强而期望在数学学习方面有进一步的提高与发展. 在这种情况下，我们编写了《高等数学学习指导》这本书.本书是与方桂英、崔克俭主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《高等数学》(第三版)相配套的学习指导书，希望它能配合教材，通过学生的自学和课外辅导等形式，缓解学生数学学习过程中所遇到的压力，同时也给学生提供更多的学习空间，使有志于考研深造的学生打好数学基础，提早为考研作准备. 本书按章编写，每章包括如下五个部分.

1. **内容概要**　给出每章的基本概念、基本定理、基本公式、重要结论及难点重点分析，旨在帮助学生系统地掌握知识体系，并深刻理解基本概念.

2. **学习目标**　对每章的各知识点，提出学生的学习要求与目标，使学生明确学习目的与学习要求.对教学要求的层次，按“了解”“会”“理解”“掌握”的次序表示程度上的差异.

3. **释疑与典型例题解析**　针对学生提出的一些难以理解或不好掌握且又是教学重点的问题，给予分析与解答，有的解答还对教学内容作了补充与总结，以帮助学生释疑解难. 对典型例题，特别是历届的考研真题(有的未标明是考研真题)进行了较详细地分析与解答，便于学生自学，并介绍了与典型例题相关的解题方法与计算技巧.学生认真钻研这部分的内容，可以更好地理解概念，拓宽解题思路，学会综合运用所学知识，提高解题能力.

4. **习题选解**　对主教材每章节中较难的习题给出解答全过程.希望学生正确对待这部分内容，坚持“先做后看”的原则，才能取到事半功倍的效果.

5. **测验题与答案**　每章配置难易适中的测验习题(含答案与提示)，作为学生学完本章内容后检测自己掌握知识的程度之用.

本书也可单独使用，便于自学，适合高等院校经济类、管理类、农林类等专业的学生使用，对教师也有一定的参考价值.参加本书编写的有江西农业大学(方桂英、胡菊华、曾海福、程国华、刘章、伍健、王巧玲、李灿华)、山西农业大学(崔克俭、赵喜

梅、韩忠海、张莉莉）与大连海洋大学（张立峰、顾剑）的教师.广大教师对本书提出了许多宝贵建议，我们在此表示真诚的感谢.并希望读者对本书存在的问题给予批评指正.

编　者

2015 年 6 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　内 容 概 要

1.1.1　函数的概念与性质

函数定义　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，f 是一个对应法则.如果对于 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，都有确定的唯一实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

函数性质

(1) **有界性**　若存在正数 M，使对一切 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

如果对任给的正数 M，总存在 $x_1\in D$，使 $|f(x_1)|>M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在常数 k_1(或 k_2)，使对一切 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant k_1\quad (\text{或 } f(x)\geqslant k_2),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**有上界**(或**有下界**)，称 k_1(或 k_2)为 $f(x)$ 在 D 上的**上界**(或**下界**).

容易证明，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

(2) **单调性**　设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，如果对 D 中任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**(或**单调减少**).

(3) **奇偶性**　设 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 D 关于原点对称，如果对任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)\quad (\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**(或**偶函数**).

在坐标平面上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(4) **周期性**　设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在常数 $l\neq 0$，使对任意 $x\in D$，总有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.显然，若 l 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也都是它的周期.所以，一个周期函数一定有无穷多个周期.通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.

注意　并非任何周期函数都有最小正周期.例如，常量函数 $f(x)=C$(C 为常数)是周期函数，任何非零实数都是它的周期，因而不存在最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数；一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

反函数　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$.若对 $f(D)$ 中每一值 y，D 中有唯一值 x 与之相对应，且 $y=f(x)$，这样便得到 $f(D)$ 上的一个新函数，称此函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$. 相对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

习惯地，$y=f(x)(x\in D)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)(x\in f(D))$.称 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ **互为反函数**.由反函数的定义可知，反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

在同一坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注意　并不是任何一个函数都有反函数.可以证明，单调增加(减少)函数必有反函数，且反函数也是单调增加(减少)的.

基本初等函数(下列 6 类函数)

(1) **常量函数**　$y=C$(C 为常数).

(2) **幂函数**　$y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R},\mu\neq0)$.

(3) **指数函数**　$y=a^x(a>0,a\neq1$，特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\mathrm{e}^x)$.

(4) **对数函数**　$y=\log_a x(a>0,a\neq1$，特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x)$.

这里对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，$y=\ln x$ 是 $y=\mathrm{e}^x$ 的反函数.

(5) **三角函数**

① 正弦函数　$y=\sin x$；　② 余弦函数　$y=\cos x$；

③ 正切函数　$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$；　④ 余切函数　$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

(6) **反三角函数**

① 反正弦函数　$y=\arcsin x$；　② 反余弦函数　$y=\arccos x$；

③ 反正切函数　$y=\arctan x$；　④ 反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$.

其中反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 分别是三角函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，$y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\right.$

$\left.\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\cot x(0<x<\pi)$的反函数.

反三角函数具有如下性质：

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$；　　$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$；

$\arctan(-x)=-\arctan x$；　　$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$.

为了便于记忆，本书给出基本初等函数的定义域、值域及主要性质一览表，见表 1.1.1.

表 1.1.1　基本初等函数的定义域、值域及主要性质一览表

函数	定义域	值域	有界性	奇偶性	单调性	周期性
$y=C$	$(-\infty,+\infty)$	$\{C\}$	有界	偶函数	非单调	周期函数，但无最小正周期
$y=x^\mu$	因 μ 而异	因 μ 而异	无界	因 μ 而异	因 μ 而异	
$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	无界		$a>1$，增加 $a<1$，减少	
$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	无界		$a>1$，增加 $a<1$，减少	
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界	奇函数	非单调	$T=2\pi$
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界	偶函数	非单调	$T=2\pi$
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界	奇函数	非单调	$T=\pi$
$y=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界	奇函数	非单调	$T=\pi$
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	有界	奇函数	增加	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	有界		减少	
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	有界	奇函数	增加	
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	有界		减少	

复合函数　已知函数 $y=f(u)$的定义域为 E，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D，值域为 $\varphi(D)$，如果 $E\cap\varphi(D)\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

初等函数　由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所产

生并且能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=2^x$，$y=\sqrt{1+2x^2}$，$y=2^{\sin^2 3x}+x$ 都是初等函数. 还有正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 也是常见的初等函数.

并非所有函数都为初等函数，不是初等函数的函数统称为**非初等函数**.分段函数一般不是初等函数.例如，符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0\end{cases}$$

与取整函数 $y=[x]$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数）是常见的非初等函数.

隐函数　设 $X\subset\mathbf{R}$，$Y\subset\mathbf{R}$，若对于任意 $x\in X$，总有唯一确定的 $y\in Y$，使得 x，y 共同满足方程

$$F(x,y)=0, \tag{1.1.1}$$

则称由方程(1.1.1)确定了一个定义在 X 上，值域含于 Y 的**隐函数**，记为

$$y=y(x),\quad x\in X,\quad y\in Y.$$

例如，方程 $x^2-y^3+1=0$ 可确定隐函数 $y=y(x)$，$x\in\mathbf{R}$，$y\in[1,+\infty)$，事实上，这个函数是 $y=\sqrt[3]{1+x^2}$，这时就说可把隐函数化为显函数了.

又如，方程 $y+e^y-e^x-x=0$ 可确定一个定义在$(-\infty,+\infty)$内的隐函数，这里 y 不能由只含 x 的解析式表示，这时就说这个隐函数不可以显化.

1.1.2　极限概念与性质

数列极限定义　设$\{x_n\}$是一个数列，a 是一个确定的数，若对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称当 $n\to\infty$ 时，数列$\{x_n\}$的极限为 a，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\quad 或\quad x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限，则称它是发散的，习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

数列极限定义可简写为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

函数极限定义（等价的简单形式）　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 称当 x 趋于无穷大（记为 $x\to\infty$）时 $f(x)$ 以常数 A 为极限.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当$x>X$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.称函数$f(x)$当$x>0$,$x$无限增大(记为$x\to+\infty$)时以常数$A$为极限.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当$x<-X$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.称函数$f(x)$当$x<0$,$|x|$无限增大(记为$x\to-\infty$)时以常数$A$为极限.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.称函数$f(x)$当$x$趋于$x_0$时以常数$A$为极限.

(5) 左极限:$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$或$f(x_0-0)=A$,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<x_0-x<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.称函数$f(x)$当$x$从$x_0$的左侧(即$x<x_0$)趋于$x_0$时以常数$A$为极限.

(6) 右极限:$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$或$f(x_0+0)=A$,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<x-x_0<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.称函数$f(x)$当$x$从$x_0$的右侧(即$x>x_0$)趋于$x_0$时以常数$A$为极限.

定理 1.1.1 函数$f(x)$当$x\to\infty$时极限存在的充分必要条件是$f(x)$当$x\to+\infty$与$x\to-\infty$时极限各自存在,并且相等,即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

因此,即使$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在,但若不相等,则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在.

定理 1.1.2(单侧极限与极限的关系) 函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是$f(x)$在点x_0的左右极限都存在,并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

因此,即使$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在,但若不相等,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

收敛数列的性质

(1) **有界性** 若数列$\{x_n\}$收敛,则它是有界的,即存在$M>0$,对一切正整数n,都有$|x_n|\leqslant M$.

注意 有界性只是数列收敛的必要条件,并非充分条件.

(2) **唯一性** 若数列$\{x_n\}$收敛,则它的极限是唯一的.

(3) **保号性** 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$且$a>0$(或$a<0$),则总存在正整数$N$,使得当$n>N$时,恒有$x_n>0$(或$x_n<0$).

保号性的更强形式:若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$且$a>0$(或$a<0$),则总存在正整数$N$,使得当$n>N$时,恒有$x_n>\dfrac{a}{2}\left(\text{或 } x_n<-\dfrac{a}{2}\right)$.

推论 1.1.1 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$且$x_n>0$(或$x_n<0$),则有$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

推论 1.1.2(保不等式性) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且从某项起恒有 $x_n\leqslant y_n$,则 $a\leqslant b$.

定理 1.1.3(收敛数列与其子数列的关系) 若数列$\{x_n\}$收敛于 a,则其任意子数列$\{x_{n_k}\}$也收敛,且极限都是 a.

可见,若数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限,则数列$\{x_n\}$发散.

函数极限的性质

(1) **局部有界性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则存在 $\delta>0$,使得 $f(x)$在点 x_0 的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有界.

(2) **唯一性** 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则它是唯一的.

(3) **局部保号性** 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,若 $A>0$(或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,使对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,总有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

保号性的更强的形式:设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,若 $A>0$(或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,使对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,总有 $f(x)>\dfrac{A}{2}$$\left(\text{或 } f(x)<-\dfrac{A}{2}\right)$.

函数极限与数列极限的关系 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,且 $x_n\neq x_0$($n\in\mathbf{N}^+$),则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

极限的四则运算法则 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

复合函数极限运算法则 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$,且存在 $\delta>0$,当 $t\in\mathring{U}(t_0,\delta)$时,$\varphi(t)\neq x_0$,复合函数 $f[\varphi(t)]$在$\mathring{U}(t_0,\delta)$内有定义,则

$$\lim_{t\to t_0}f[\varphi(t)]=\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

即

$$\lim_{t\to t_0}f[\varphi(t)]\xlongequal{x=\varphi(t)}\lim_{x\to x_0}f(x).$$

可见,求极限可以变量代换,化繁为简.

极限存在的两个准则

(1) **单调有界收敛准则** 单调有界数列必收敛.

(2) **夹逼准则** 设数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足：

① $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$($n \geqslant K$,$K$ 为某个正整数)；② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列$\{y_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

夹逼准则函数情况，例如，设$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，若存在 x_0 的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$，使对一切 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$，总有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

常见重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1(a>0)$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在； (6) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1, \\ \infty, & |q|>1, \\ 1, & q=1; \end{cases}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^a} = 0(a>0)$； (8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^a} = \infty(a>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0(n\in\mathbf{N}^+)$； (10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty(n\in\mathbf{N}^+)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$； (12) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \infty$；

(13) 当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$；

(14) 当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \infty$；

(15) (“抓大头”原理)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n} = \begin{cases} 0, & m<n, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n, \\ \infty, & m>n, \end{cases}$$

其中 m,n 为非负整数，$a_0 \neq 0$,$b_0 \neq 0$.

(16) 称$[f(x)]^{g(x)}$为**幂指函数**，如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = A^B.$$

1.1.3 无穷小量与无穷大量

无穷小量定义 如果在自变量的某变化过程中，函数 $f(x)$的极限是零，则称在这个变化过程中 $f(x)$是**无穷小量**(或**无穷小**).

无穷大量定义 如果在自变量的某变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值

$|f(x)|$无限增大,则称在这个变化过程中 $f(x)$是**无穷大量**.例如,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$,即对无论多么大的正数 $G>0$,都$\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|>G$.又如,$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty$,即对无论多么大的正数 $G>0$,都$\exists\,X>0$,当$|x|>X$ 时,有 $|f(x)|>G$.

无穷小量的性质　在自变量的同一变化过程中,

(1) 有限个无穷小的和仍然是一个无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是一个无穷小;

(3) 无穷小与有界函数的乘积是无穷小.

函数极限与无穷小量的关系　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$当 $x \to x_0$ 时是无穷小量.

无穷小量与无穷大量的关系　在自变量的同一变化过程中,

(1) 若 $f(x)$是无穷大量,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小量;

(2) 若 $f(x)$是无穷小量,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大量.

无穷小量的比较　设$\lim\limits_{x \to x_0}\alpha(x)=0$,$\lim\limits_{x \to x_0}\beta(x)=0$,且 $\beta(x)\neq 0$.

(1) 如果$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$,也称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$低阶的无穷小;

(2) 如果$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$($c$ 为常数),则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小;

(3) 如果$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$($k\in\mathbf{N}^+$),则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的 k 阶无穷小;

(4) 如果$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小,记作

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

无穷小量等价代换定理　设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$,$\alpha_1(x)$,$\beta_1(x)$当 $x \to x_0$ 时都是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)$,如果$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在,则$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也存在,且有

$$\lim_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x \to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

常用的等价无穷小:当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x,\quad \tan x \sim x,\quad \arcsin x \sim x,\quad \arctan x \sim x,$$
$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\quad (1+x)^m-1 \sim mx,\quad \ln(1+x) \sim x,$$
$$a^x-1 \sim x\ln a,\quad e^x-1 \sim x,\quad \tan x-\sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

注意 (1) 利用无穷小量等价代换定理求极限,只是在无穷小量作乘除运算时使用,无穷小量在作加减运算时一般不能使用,如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$,解法、结果都是错误的.事实上,因为当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $\alpha(x)\to 0$ 时,常用的等价无穷小关系中将 x 换成 $\alpha(x)$ 都成立,如

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x).$$

1.1.4 函数连续性

连续定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果当自变量在点 x_0 处的增量 $\Delta x\to 0$ 时,函数相应的增量 $\Delta y\to 0$,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处连续**,称 x_0 为**连续点**.

连续等价定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处连续**.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续也等价于 $f(x)$ 要同时满足下列三条:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

单侧连续 (1) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域 $(x_0-\delta,x_0]$ 内有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处左连续**.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 内有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处右连续.**

单侧连续与连续的关系　函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $y=f(x)$在点 x_0 处既左连续,又右连续.

函数的间断点定义　如果函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,且在点 x_0 处不连续,则称 $f(x)$在点 x_0 处**间断**,并称 x_0 为 $f(x)$的**间断点**或**不连续点.**

由函数 $f(x)$在点 x_0 连续定义可知,当函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,且若出现下列三种情况之一:

(1) $f(x)$在点 x_0 没有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x)$在点 x_0 有定义且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$,

则称点 x_0 为 $f(x)$的间断点.

间断点分类

(1) **第一类间断点**　设点 x_0 为 $f(x)$的间断点,但当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$的左极限 $f(x_0-0)$与右极限 $f(x_0+0)$都存在,则称 x_0 为 $f(x)$的**第一类间断点**,其中,

当 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$时,称 x_0 为 $f(x)$的**跳跃间断点**;

当 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$时,称 x_0 为 $f(x)$的**可去间断点**,这时 $f(x_0)$没有定义,或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

(2) **第二类间断点**　设点 x_0 为 $f(x)$的间断点,但当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$左极限 $f(x_0-0)$和右极限 $f(x_0+0)$至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$的**第二类间断点**,其中,

当 $f(x_0-0)$或 $f(x_0+0)$为无穷大时,称 x_0 为 $f(x)$的**无穷间断点**;

当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$的值摆动不定,称 x_0 为 $f(x)$的**振荡间断点.**

连续函数的性质

初等函数的连续性　函数的连续性是利用极限来定义的,所以根据极限的运算法则可推得下列函数连续的性质.

连续函数的四则运算　若函数 $f(x)$,$g(x)$都在点 x_0 连续,则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 也连续.

反函数的连续性　若函数 $y=f(x)$在区间 I_x 上单调增加(减少)且连续,则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加(减少)且连续.